Clase 6: Continuación.

Peter Hummelgens

9 de enero de 2007

2. Según (e) existe $\delta^{(n)} * T$ para todo $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ y tenemos

$$\begin{aligned} \langle \delta^{(n)} * T, \varphi \rangle &= \langle T(v), \langle \delta^{(n)}(u), \varphi(u+v) \rangle \rangle = \langle T(v), (-1)^n \varphi^{(n)}(0+v) \rangle \\ &= (-1)^{(n)} \langle T(v), \varphi^{(n)}(v) \rangle = \langle T^{(n)}, \varphi \rangle \ \text{ para } \underline{\text{todo}}\ \phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \delta^{(n)} * T = T * \delta^{(n)} = T^{(n)}; \ \ n = 0, 1, 2, \cdots, \ \ T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{1}$$

En particular

$$\delta' * T = T',$$

es decir <u>la derivada distribucional es un operador de convolución</u>

$$\left(\frac{d}{dx} \right)_{gen} = \delta' * .$$

Para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ podemos escribir (1) como

$$f^{(n)}_{gen}(x) = \delta^{(n)}(x) * f(x); \ \ n = 0, 1, 2, \cdots . \tag{2}$$

Sea $L = a_0 + a_1 d/dx + \cdots + a_n d^n/dx^n$ un ODLCC, entonces para $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, con (1),

$$\begin{aligned} LT &= a_0 T + a_1 T' + \cdots + a_n T^{(n)} = a_0 \delta * T + a_1 \delta' * T + \cdots + a_n \delta^{(n)} * T = \\ &= [a_0 \delta + a_1 \delta' + \cdots + a_n \delta^{(n)}] * T, \end{aligned}$$

de modo que (1) se generaliza a

$$LT = T * (L\delta) = (L\delta) * T, \ \ T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{3}$$

3. Si existe $S * T$ entonces existen $(\tau_a S) * T$, $S * (\tau_a T)$ y

$$\begin{aligned} \langle \tau_a (S * T), \varphi \rangle &= \langle (S * T)(x), \varphi(x+a) \rangle = \langle S(u), \langle T(v), \varphi(u+v+a) \rangle \rangle \\ &= \langle S(u), \langle (\tau_a T)(v), \varphi(u+v) \rangle \rangle = \langle S * (\tau_a T), \varphi \rangle, \ \text{ para } \underline{\text{todo}}\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \tau_a(S*T) = S*(\tau_a T),$$

entonces también

$$\tau_a(S*T) = \tau_a(T*S) = T*(\tau_a S) = (\tau_a S)*T.$$

Finalmente

$$\tau_a(S*T) = (\tau_a S)*T = S*\tau_a(T), \quad a \in \mathbb{R} \tag{4}$$

en palabras: para trasladar $S*T$ basta trasladar <u>uno</u> de los factores.

4. Si existe $S*T$, entonces existen $S'*T$ y $S*T'$ y tenemos

$$\begin{aligned}
\langle (S*T)', \varphi \rangle &= -\langle S*T, \varphi' \rangle = -\langle S(u), \langle T(v), \varphi'(u+v) \rangle \rangle \\
&= \langle S(u), -\langle T(v), \varphi'(u+v) \rangle \rangle = \langle S(u), \langle T'(v), \varphi(u+v) \rangle \rangle \\
&= \langle S*T', \varphi \rangle \ \text{ para } \underline{\text{todo}}\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow (S*T)' = S*T'$, entonces también

$$(S*T)' = (T*S)' = T*S'$$

entonces

$$(S*T)' = S'*T = S*T' \tag{5}$$

en palabras: para tomar la DG de $S*T$ basta tomar la DG de <u>uno</u> de los factores. Aplicación repetida de (5) da

$$(S*T)'' = ((T*S)')' = (S'*T)' = S''*T = S'*T' = S*T'' = \cdots, \quad etc,$$

y es claro que

$$(S*T)^{(n)} = S^k * T^{(n-k)}; \quad n = 1, 2, \cdots; \quad 0 \le k \le n. \tag{6}$$

¡Podemos mover arbitrariamente las DG de un factor a otro!. Más generalmente: para un ODLCC L tenemos

$$L(S*T) = (LS)*T = S*(LT), \quad \text{si existe } S*T. \tag{7}$$

5.- Para $f, g, k \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ causales o más generalmente $f.g.k \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ tenemos

$$(f*g)*k = f*(g*k) = f*g*k \ \text{ (no hace falta poner paréntesis.)}$$

<u>Lo mismo vale en $L^1(\mathbb{R})$</u>. Además, si $S_1, \cdots, S_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ con todos los S_i <u>excepto posiblemente uno</u> de soporte compacto, entonces existe $S_1 * \cdots * S_n$ donde podemos poner paréntesis de manera arbitraria.

1. Ejemplos varios.

A continuación presentaremos aplicaciones de las reglas operacionales

Ejemplo 1. *Se pide hallar $\phi(x) = h(x) * h(x)\cos(2x)$. Esto hicimos en la clase anterior mediante integración. Ahora podemos hacerlo más fácilmente sin integración*

$$\begin{aligned}
\phi(x) = h(x) * h(x)\cos(2x) &= h(x)\left(\frac{1}{2}h(x)\operatorname{sen}(2x)\right)'_{gen} \\
&\overset{(5)}{=} \frac{1}{2}h'_{gen}(x) * h(x)\operatorname{sen}(2x) = \frac{1}{2}\delta(x) * h(x)\operatorname{sen}(2x) \\
&= \frac{1}{2}h(x)\operatorname{sen}(2x), \quad \textit{listo.}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2. *Sean $f(x) = e^{-|x|}$, $-\infty < x < \infty$ y*

$$g(x) = \begin{cases} 1; & -1 \leq x \leq 1 \\ 0; & \textit{otro } x. \end{cases}$$

Como g es de soporte compacto, existe $f * g$. Sea $k = f * g$, entonces

$$\begin{aligned}
k'_{gen}(x) &\overset{(5)}{=} f(x) * g'_{gen} = e^{-|x|} * [\delta_{-1}(x) - \delta_1(x)] \\
&= e^{-|x+1|} - e^{-|x-1|}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad k'_{gen}(x) = \begin{cases} \frac{e^2-1}{e}e^x; & x < -1 \\ -\frac{2}{e}\operatorname{senh}(x); & -1 < x < 1 \\ -\frac{e^2-1}{e}e^{-x}; & x > 1 \end{cases},$$

luego por integración

$$k(x) = \begin{cases} \frac{e^2-1}{e}e^x + c_1; & x < -1 \\ -\frac{2}{e}\cosh(x) + c_2; & -1 < x < 1 \\ \frac{e^2-1}{e}e^{-x} + c_3; & x > 1 \end{cases}$$

con c_1, c_2, c_3 constantes. Pero sabemos que $k \in L^1(\mathbb{R})$, lo que implica que $\lim_{x\to\pm\infty} k(x) = 0$ $\Longrightarrow c_1 = c_3 = 0$. Además k debe ser continua porque la expresión para $k'_{gen}(x)$ no contiene deltas, y esto implica $c_2 = 2$. Con esto $k(x)$ queda determinada.

Ejemplo 3. *Sean*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \textit{otro } x. \end{cases}$$

y $g(x) = e^{\lambda x}$; $-\infty < x < \infty$ *(*$\lambda \neq 0$ *una constante). Entonces* $k(x) = f(x) * g(x)$ *existe porque* f *es de soporte* <u>*compacto*</u>*. Tenemos*

$$k(x) = \int_{-1}^{1} (1 - \xi^2) e^{\lambda(x-\xi)} d\xi,$$

pero <u>*no*</u> *vamos a calcular esta integral. Tenemos* $k'''_{gen}(x) \overset{(5)}{=} f(x) * g'''_{gen}(x) = f(x) * \lambda^3 g(x)$

$$\Longrightarrow \quad k'''_{gen}(x) = \lambda^3 k(x).$$

Pero también

$$\begin{aligned} k'''_{gen}(x) &\overset{(5)}{=} f'''(x) * g(x) = [-2\delta_{-1}(x) + 2\delta_1(x) + 2\delta'_{-1}(x) + 2\delta'_1(x)] * g(x) \\ &= -2g(x+1) + 2g(x-1) + 2\delta_{-1}(x) * g'(x) + 2\delta_1(x) * g'(x) \\ &= -2g(x+1) + 2g(x-1) + 2g'(x+1) + 2g'(x-1) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad k'''_{gen}(x) = -2e^{\lambda(x+1)} + 2e^{\lambda(x-1)} + 2\lambda e^{\lambda(x+1)} + 2\lambda e^{\lambda(x-1)}$$

$$\Longrightarrow \quad k(x) = \frac{2}{\lambda^3}\left[(\lambda - 1)e^{\lambda} + (\lambda + 1)e^{-\lambda}\right] e^{\lambda x}; \quad -\infty < x < \infty.$$

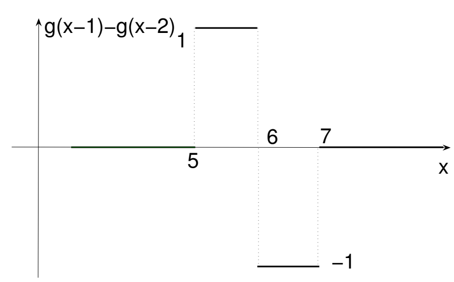
Ejemplo 4. *Sean*

$$f(x) = \begin{cases} 1; & 1 \leq x \leq 2 \\ 0; & otro\ x. \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} 1, & 4 \leq x \leq 5 \\ 0, & otro\ x. \end{cases}$$

Existe $k = f * g$ *porque ambos factores son de soporte compacto y sabemos que* k *tiene que ser de soporte compacto. Tenemos*

$$k'_{gen}(x) \overset{(5)}{=} f'_{gen}(x) * g(x) = [\delta_1(x) - \delta_2(x)] * g(x) = g(x-1) - g(x-2).$$

La gráfica de $g(x-1) - g(x-2)$ *se consigue fácilmente y es*



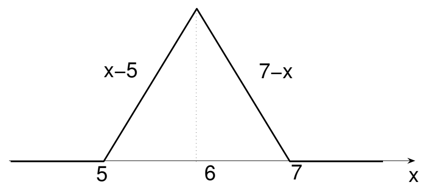
Ahora, de $k(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} k'_{gen}(t)dt$ tenemos

$$\text{para } x < 5\text{: } k(x) = 0$$

$$\text{para } 5 < x < 6 : k(x) = \int\limits_{5}^{x} 1dt = x - 5$$

$$\text{para } 6 < x < 7\text{: } k(x) = 1 + \int\limits_{6}^{x} (-1)dt = 1 - (x - 6) = 7 - x$$

$$\text{para } x > 7\text{: } k(x) = 0$$



2. Aplicación a ED con coeficientes constantes.

Sea L un ODLCC y consideremos la ED

$$Lu(x) = f(x), \quad -\infty < x < \infty \tag{8}$$

donde $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ dada y buscamos soluciones $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. El problema principal es encontrar una solución particular $u_p \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de (8) (la ED $Lu(x) = 0$ tiene en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ únicamente las soluciones clásicas $v \in C^\infty(\mathbb{R})$ que se consigue con métodos elementales de Mat. IV). Sea $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ una s.f. de L y <u>supongamos que existe</u> $E * f$ $(= f * E)$. Entonces

$$L(E * f) \overset{(7)}{=} (LE) * f = \delta * E = E$$

$\Longrightarrow u_p = E * f$ <u>es una solución particular de (8)</u>.

Ejemplo 5. *Sea la ED*

$$u''(x) + u(x) = h(x - 1)e^x, \quad -\infty < x < \infty. \tag{9}$$

Ya conocemos la s.f. $E(x) = h(x)\operatorname{sen}(x)$ *de* $L = d^2/dx^2 + 1$ *(el ODLCC que figura en (9)). Como* $E(x)$ *y* $h(x-1)e^x$ *son ambas causales, existe* $E(x) * h(x-1)e^x$ *y*

$$u(x) = E(x) * h(x - 1)e^x = h(x)\operatorname{sen}(x) * h(x - 1)e^x \tag{10}$$

es una solución particular de (10).

Tenemos $u(x) = h(x-1)\int\limits_0^{x-1} \operatorname{sen}(\xi)e^{x-\xi}d\xi = h(x-1)e^x\int\limits_0^{x-1} \operatorname{sen}(\xi)e^{-\xi}d\xi$*, la integral es fácil (2 integraciones por partes) y obtenemos*

$$u(x) = \frac{1}{2}h(x-1)\left[e^x - e\operatorname{sen}(x-1) - e\cos(x-1)\right]. \tag{11}$$

Alternativamente (sin integración)

$$u(x) = h(x)\operatorname{sen}(x) * h(x-1)e^x \quad \overset{(5)}{\Longrightarrow} \quad u'_{gen}(x) = h(x)\operatorname{sen}(x) * \left[h(x-1)e^x + e\delta_1(x)\right]$$

$$\Longrightarrow \quad u'_{gen}(x) = u(x) + eh(x-1)\operatorname{sen}(x-1)$$

$$\Longrightarrow \quad u''_{gen}(x) = u'_{gen}(x) + eh(x-1)\cos(x-1)$$

$$\Longrightarrow \quad u''_{gen} = u(x) + eh(x-1)\operatorname{sen}(x-1) + eh(x-1)\cos(x-1).$$

Pero también $u''_{gen}(x) = -u(x) + h(x-1)e^x$ *(ya que* u *es solución de (10))*

$$\xrightarrow{restando} \quad 0 = 2u(x) + eh(x-1)\left[\operatorname{sen}(x-1) + \cos(x-1)\right] - h(x-1)e^x$$

$$\Longrightarrow \quad u(x) = \frac{1}{2}h(x-1)\left[e^x - e\operatorname{sen}(x-1) - e\cos(x-1)\right],$$

en acuerdo con (11).

La solución general de $Lv(x) = 0$ *es* $v(x) = A\cos(x) + B\operatorname{sen}(x)$ *(*$A, B \in \mathbb{C}$ *arbitrarias)* $\Longrightarrow$ *la solución general de (9) es*

$$u(x) = \frac{1}{2}\left[e^x - e\operatorname{sen}(x-1) - e\cos(x-1)\right] + A\cos(x) + B\operatorname{sen}(x).$$